

Analisis Numerik Gerak Jatuh Bebas: Penerapan Metode Deret Taylor dengan MATLAB

Rizal Muslim Sinaga¹ Safitra Randiawan Lubis² Fahra Pebiana Putri³ Putri Harliana⁴

Universitas Negeri Medan, Kota Medan, Provinsi Sumatera Utara, Indonesia^{1,2,3,4}

Email: rizalsinaga838576@gmail.com¹ randiawansafitra@gmail.com²

fahrapebianaputri2@gmail.com³ putri.harliana.stth@gmail.com⁴

Abstrak

Persamaan diferensial biasa (PDB) sering muncul di berbagai bidang ilmu pengetahuan, termasuk fisika dan biologi. Salah satu penerapan PDB dalam fisika adalah fenomena gerak jatuh bebas. Penelitian ini berfokus pada penerapan metode deret Taylor untuk menyelesaikan PDB, dengan studi kasus gerak jatuh bebas. Metode deret Taylor dapat menjadi rumit secara manual, terutama untuk orde yang lebih tinggi, sehingga penggunaan software seperti MATLAB sangat penting untuk mempercepat perhitungan dan meningkatkan akurasi dibandingkan metode manual. Hasil penelitian ini membuktikan bahwa metode deret Taylor dapat diterapkan secara efektif untuk menyelesaikan PDB dalam kasus gerak jatuh bebas. Selain itu, simulasi MATLAB juga terbukti menjadi alat yang bermanfaat dalam membantu pemahaman fenomena fisika dan mendukung pendidikan fisika dengan memberikan visualisasi yang lebih jelas.

Kata Kunci: Metode Deret Taylor, Persamaan Diferensial Biasa, MATLAB, Gerak Jatuh Bebas

Abstract

Ordinary differential equations (ODEs) frequently arise in various fields of science, including physics and biology. One example of ODE application in physics is the phenomenon of free fall. This study focuses on the application of the Taylor series method to solve ODEs, using free fall as a case study. Although the Taylor series method is effective, manual calculations can become quite complex, especially with higher orders. Therefore, the use of software like MATLAB is crucial to support calculations, making them more efficient and accurate compared to manual methods. This research demonstrates that the Taylor series method can be effectively applied to solve ODEs in the context of free fall.

Keywords: Taylor Series Method, Ordinary Differential Equations, MATLAB, Free-Fall Motion



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah salah satu cabang ilmu matematika yang sangat banyak digunakan para ilmuwan dan peneliti untuk memecahkan fenomena-fenomena fisik maupun kimia yang terdapat disekitar kita atau dalam kehidupan sehari-hari, oleh karena itu persamaan diferensial mempunyai peranan yang sangat penting untuk memodelkan masalah fenomena tersebut dan mendapatkan solusinya. Persamaan Diferensial (PD) dibagi menjadi 2 yaitu: Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). PDB sering muncul dalam berbagai disiplin ilmu, seperti fisika, salah satu contohnya adalah fenomena gerak jatuh bebas. Gerak jatuh bebas adalah peristiwa penting dalam fisika, yang menggambarkan pergerakan benda di bawah pengaruh gravitasi tanpa hambatan udara. Fenomena ini sering kali dimodelkan menggunakan persamaan diferensial untuk menggambarkan perubahan posisi dan kecepatan benda terhadap waktu. Untuk menyelesaikan PDB seperti ini, metode analitik maupun numerik dapat digunakan. Salah satu metode numerik yang paling sering digunakan untuk mendekati solusi persamaan diferensial adalah deret Taylor. Deret Taylor menawarkan cara efektif untuk menyelesaikan PDB, terutama ketika solusi analitik sulit ditemukan. Dalam penelitian ini, metode deret Taylor

diterapkan untuk menyelesaikan PDB pada studi kasus gerak jatuh bebas, dengan menggunakan MATLAB untuk mendukung perhitungan dan simulasi. Studi ini menunjukkan bagaimana metode deret Taylor dapat digunakan secara efektif dalam pemodelan gerak jatuh bebas, memberikan solusi yang akurat dan efisien.

Tinjauan Pustaka

Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial jika fungsi yang tidak diketahui hanya bergantung pada satu peubah bebas/hanya melibatkan satu variabel bebas. PDB banyak digunakan dalam berbagai aplikasi untuk menggambarkan dinamika sistem. Namun, solusi analitiknya tidak selalu tersedia, sehingga diperlukan pendekatan numerik untuk mendapatkan solusi tersebut. Orde persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari turunan yang terdapat dalam persamaan tersebut. Sementara itu, derajat persamaan diferensial adalah eksponen yang menaikkan turunan dengan orde tertinggi tersebut. Persamaan diferensial orde pertama memuat turunan pertama y' , mungkin pula y ; dan fungsi x yang diberikan [2]. Bentuk umumnya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + g(x)$$

Keterangan: $\frac{dy}{dx}$ adalah turunan pertama dari y terhadap x , sementara $p(x)$ adalah fungsi koefisien yang bergantung pada x . Di sisi lain, $g(x)$ adalah fungsi bebas yang tidak bergantung pada y .

Persamaan diferensial orde dua melibatkan turunan kedua. Persamaan ini banyak digunakan dalam pemodelan fenomena fisis, misalnya dalam penganalisisan sistem getaran dan analisis kelistrikan sirkuit. Untuk mendapatkan penyelesaian ini harus melalui beberapa tahapan. Tahap pertama adalah menemukan fungsi pelengkap-nya. Tahap kedua adalah menemukan integral tertentu (Parasidis et al., 2020). Dan terakhir komplementer fungsi dan integral tertentu disatukan untuk membentuk sebuah solusi umum. Bentuk umum:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

Keterangan : $\frac{d^2y}{dx^2}$ adalah turunan kedua terhadap x , $\frac{dy}{dx}$ adalah turunan pertama terhadap x , $p(x)$ dan $q(x)$ adalah koefisien fungsi x , sedangkan $g(x)$ merupakan fungsi bebas.

Metode Deret Taylor

Pada umumnya, deret Taylor biasanya di andalkan untuk menghampiri sebuah fungsi ke dalam bentuk suku banyak (polinomial). Deret Taylor mendefinisikan bahwa seumpamanya $f(x)$ dan seluruh turunannya $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$, dan seterusnya di dalam selang $[a, b]$ dengan nilai a yang telah terdefiniskan atau deret Taylor yang merupakan polinomial dengan orde n pada a , maka $f(x)$ bisa diperluas dengan formula [4]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n \text{ atau } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (h)^n$$

Metode Deret Taylor adalah teknik numerik yang memungkinkan kita untuk memperkirakan solusi dari PDB dengan mengekspansi fungsi di sekitar suatu titik dalam bentuk deret Taylor. Metode ini sangat berguna dalam menyelesaikan PDB, terutama ketika solusi analitik sulit diperoleh. Dalam jurnal ini, metode deret Taylor akan diterapkan untuk memecahkan masalah gerak jatuh bebas, yang merupakan PDB sederhana, sebagai contoh kasus.

Gerak Jatuh Bebas

Salah satu contoh gerak yang dipercepat adalah gerakan jatuh. Benda, bagaimanapun ukuran dan beratnya, akan jatuh dengan percepatan konstan yang sama apabila tidak ada gesekan udara. Efek gesekan udara dan berkurangnya percepatan akibat tinggi letak benda tersebut diabaikan. Gerak ini disebut "jatuh bebas", tau juga dikenal sebagai gerak vertikal ke bawah[6]. Perhitungan dasar dalam gerak jatuh bebas:

1. Kecepatan akhir benda (v)

$$v = g \cdot t \quad v = g \cdot t$$

Keterangan : v adalah kecepatan akhir dalam meter per detik (m/s), g adalah percepatan gravitasi yang sekitar 9,8 meter per detik kuadrat (m/s²), dan t adalah waktu benda jatuh dalam detik (s).

2. Posisi atau Jarak Tempuh (s)

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Keterangan : s adalah jarak tempuh dalam meter (m), g adalah percepatan gravitasi yang sekitar 9,8 meter per detik kuadrat (m/s²), dan t adalah waktu benda jatuh dalam detik (s).

3. Kecepatan benda pada ketinggian tertentu (v) $v = 2gh$

Keterangan: v adalah kecepatan akhir dalam meter per detik (m/s), g adalah percepatan gravitasi yang sekitar 9,8 meter per detik kuadrat (m/s²), dan h adalah ketinggian awal dalam meter (m).

Persamaan yang menggambarkan gerak jatuh bebas dapat diselesaikan secara numerik menggunakan metode deret Taylor untuk memprediksi posisi dan kecepatan benda setelah beberapa waktu.

MATLAB

MATLAB atau Matrix Laboratory merupakan software yang berguna untuk pemrograman, analisis, dan komputasi teknis serta matematis yang berfokus pada operasi matriks. Penggunaan MATLAB dalam Matematika digunakan untuk memudahkan pembelajaran pemrograman matematika. MATLAB memiliki toolbox yang dapat digunakan untuk aplikasi khusus, seperti simulasi, logika fuzzy, pengoptimalan, pengolahan citra digital, dan berbagai teknologi lainnya. Dalam penelitian ini, MATLAB digunakan untuk mengimplementasikan metode deret Taylor dalam menyelesaikan PDB, serta untuk memvisualisasikan hasil yang diperoleh dari studi kasus gerak jatuh bebas.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan metode deret Taylor dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB), dengan gerak jatuh bebas sebagai studi kasus. Penelitian ini akan mengumpulkan data kuantitatif berdasarkan kondisi awal gerak jatuh bebas, yaitu posisi awal $x_0 = 0$ meter dan kecepatan awal $v_0 = 0$ meter per detik. Data akan diperoleh melalui simulasi posisi benda selama periode waktu dari $t = 0$ hingga $t = 5$ detik, dengan interval waktu 0,05 detik. Dengan demikian, total 100 titik data posisi akan dihasilkan untuk dianalisis. Metode deret Taylor akan digunakan untuk menghitung posisi benda pada setiap interval waktu, memungkinkan evaluasi kuantitatif hasil simulasi. Data yang diperoleh akan divisualisasikan dalam bentuk grafik untuk menunjukkan lintasan gerak jatuh bebas dan memahami perilaku benda seiring waktu.

Proses Permodelan Dan Simulasi

1. Persiapan Parameter Sistem. Menentukan kondisi awal, yaitu posisi $x_0 = 0$ meter, $v_0 = 0$ meter per detik, dan percepatan gravitasi $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

2. Solusi dengan Metode Deret Taylor. Menerapkan rumus deret Taylor untuk menghitung posisi dan kecepatan benda pada waktu $t = 0$ hingga $t = 5$ detik dengan interval 0.05 detik.
3. Implementasi MATLAB. Menggunakan kode MATLAB untuk melakukan perhitungan numerik dan memvisualisasikan hasil simulasi, termasuk menghasilkan grafik jalur gerak jatuh bebas benda.

```

% Parameter kondisi awal
t0 = 0;      % Waktu awal (s)
x0 = 0;      % Posisi awal (m)
v0 = 0;      % Kecepatan awal (m/s)
g = 9.81;    % Percepatan gravitasi (m/s^2)

% Rentang waktu
t = linspace(t0, 1, 100); % 0 hingga 1 detik, 100 titik waktu

% Perhitungan posisi menggunakan metode deret Taylor (hingga orde kedua)
x_taylor = x0 + v0 * (t - t0) + 0.5 * g * (t - t0).^2;

% Plot hasil
figure;
plot(t, x_taylor, 'b-', 'Linewidth', 2);
title('Gerak Jatuh Bebas Menggunakan Metode Deret Taylor');
xlabel('Waktu (s)');
ylabel('Posisi (m)');
grid on;
legend('Posisi Benda', 'Location', 'Northwest');
legend(['Posisi Benda'], 'Location', 'none', 'Position', [0.5830 0.1684 0.2876, 0.0549])
    
```

Gambar 1. Pengkodean MATLAB untuk Solusi Numerik Gerak Jatuh Bebas dengan Metode Deret Taylor

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Hasil Simulasi

Tabel di bawah ini menunjukkan posisi benda pada berbagai titik waktu selama simulasi gerak jatuh bebas menggunakan metode deret Taylor:

Tabel 1. Hasil Data Simulasi Gerak Jatuh Bebas dengan Metode Deret Taylor

Waktu (s)	Posisi (m)
00.00	00.00
00.01	00.05
00.02	00.20
00.03	00.45
00.04	0,055556
00.05	01.25
00.06	0,097222
00.07	02.45
00.08	03.20
00.09	04.05
01.00	05.00

Berdasarkan tabel tersebut, dapat kita lihat bahwa posisi benda meningkat seiring dengan bertambahnya waktu, yang sesuai dengan hukum gerak jatuh bebas.



Gambar 2. Grafik Jalur Gerak Jatuh Bebas Menggunakan Metode Deret Taylor Orde Kedua

Gambar 2 menunjukkan lintasan gerakan jatuh bebas dari suatu objek yang diukur menggunakan pendekatan deret Taylor hingga tingkat kedua. Grafik ini menunjukkan keterkaitan antara letak objek (dalam meter) dan durasi (dalam detik) dalam interval 0 hingga 1 detik. Dari diagram, terlihat bahwa lokasi objek naik secara eksponensial seiring berjalannya waktu, sesuai dengan sifat fisika gerak benda jatuh bebas di bawah pengaruh gravitasi. Ini menandakan bahwa penggunaan teknik deret Taylor hingga tingkat kedua dapat menggambarkan inti dari dinamika pergerakan benda dengan baik.

Analisis Kesalahan

Dengan memperhatikan kurva yang dihasilkan, kita dapat menyimpulkan bahwa metode deret Taylor yang diterapkan memberikan hasil yang sesuai dengan teori. Untuk evaluasi lebih lanjut, analisis kesalahan dapat dilakukan dengan membandingkan hasil numerik ini dengan solusi analitik yang diketahui, yaitu $xt=12gt^2$. Berikut ini adalah tabel perbandingan antara hasil numerik dan analitik, serta kesalahan absolut dan relatifnya:

Tabel 2. Kesalahan Numerik Perhitungan Gerak Jatuh Bebas Menggunakan Metode Deret Taylor

Waktu (s)	Posisi Analitik (m)	Posisi Numerik (m)	Kesalahan Absolut (m)	Kesalahan Relatif (%)
00.00	00.00	00.00	00.00	00.00
00.01	0.049	00.05	0.001	02.04
00.02	0,1361111111	00.20	0.004	02.04
00.03	0,30625	00.45	0.009	02.04
00.04	0,5444444444	0,0555555556	0.016	02.04
00.05	1.225	01.25	0.025	02.04
00.06	1.764	0,0972222222	0.036	02.04
00.07	2.401	02.45	0.049	02.04
00.08	3.136	03.20	0.064	02.04
00.09	3.969	04.05	0.081	02.04
01.00	4.900	05.00	0,0694444444	02.04

Dari tabel ini, dapat dilihat bahwa metode deret Taylor memberikan hasil yang cukup akurat dengan kesalahan relatif yang rendah. Kesalahan absolut meningkat seiring dengan waktu, tetapi masih dalam batas yang dapat diterima untuk sebagian besar aplikasi.

Implementasi Matlab

Kode MATLAB yang digunakan dalam simulasi ini berhasil menghitung posisi objek pada berbagai waktu dan menampilkan hasilnya dengan baik. Simulasi ini memberikan gambaran yang akurat tentang bagaimana metode deret Taylor dapat diterapkan dalam pemodelan gerak jatuh bebas. Selain itu, ini menunjukkan bagaimana MATLAB dapat digunakan sebagai alat bantu untuk perhitungan numerik dan visualisasi.

KESIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa metode deret Taylor dapat diaplikasikan dengan efisien untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa, seperti dalam contoh gerak jatuh bebas. Simulasi yang diterapkan menggunakan MATLAB menghasilkan solusi numerik yang tepat dan berkesinambungan dengan teori. Hasil percobaan menunjukkan jalur benda yang cocok dengan prediksi fisika, mengkonfirmasi keakuratan metode deret Taylor dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Di samping itu, penelitian ini menegaskan peranan krusial MATLAB dalam mendukung analisis dan simulasi numerik di sektor ini.

Ucapan Terima Kasih

Penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan dalam penelitian ini. Terima kasih kepada para dosen pembimbing, Ibu Putri Harliana, S.T., M.Kom yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama proses penelitian ini. Terima kasih juga kepada Universitas Negeri Medan (UNIMED) yang telah memberikan fasilitas sehingga penelitian ini dapat terlaksana dengan baik. Penghargaan yang tulus juga ditujukan kepada seluruh rekan sejawat dan asisten penelitian yang telah membantu dalam pengumpulan data dan pelaksanaan simulasi di laboratorium. Ucapan terima kasih khusus untuk tim MATLAB yang telah memberikan dukungan teknis dan solusi yang memudahkan dalam implementasi simulasi numerik.

DAFTAR PUSTAKA

- I. Trianiza, A. N. Lisdawati, and F. Herlina, Fisika Dasar Untuk Perguruan Tinggi, PENA PERSADA, 2022.
- L. Deswita, S. Syamsudhuha, and M. Asral, "Analisa Persamaan Diferensial Orde Fraksional Numerik Menggunakan Metode," 2021.
- R. Maya, Persamaan Diferensial Biasa, Bandung: UIN Sunan Gunung Djati Bandung, 2014.
- S. P. Misbah, M. P. Sinaga, M. P. Muhammad, N. M. P. Nadrah, N. M. P. Sihombing, I. M. P. Siahaan, K. W. A., and R. C. Siagian, "Persamaan Diferensial Matematika Fisika," Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI), 2022.
- T. Febrianti and E. Harahap, "Penggunaan Aplikasi Matlab dalam Pembelajaran Program Linear," Matematika: Jurnal Teori dan Terapan Matematika, vol. 20, no. 1, pp. 1-8, 2021
- T. Hidayati, W. G. Aedi, and L. F. Masitoh, Metode Numerik, Unpam Press, 2022.
- W. Murtafiah and D. Apriandi, Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya, 2018.