

Induksi Matematika dalam Penyelesaian Masalah Kombinatorika Dasar

Rohit Jhon Lamtama Purba¹ Yeremia Setya Maharman Gurning² Josua Anugrah Deo Tampubolon³

Program Studi Ilmu Komputer, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan, Kota Medan, Provinsi Sumatera Utara, Indonesia^{1,2,3}

Email: purbarohit32@gmail.com¹

Abstrak

Induksi matematika merupakan metode pembuktian yang penting dalam berbagai bidang matematika, termasuk kombinatorika. Dalam penyelesaian masalah kombinatorika dasar, induksi matematika digunakan untuk membuktikan kebenaran pernyataan yang berlaku pada seluruh bilangan bulat positif, dengan memulai dari kasus dasar dan melanjutkan dengan pembuktian pada tahap masalah kombinatorika dasar, seperti menghitung jumlah cara pemilihan objek, penyusunan objek, dan distribusi objek. Dengan fokus pada langkah-langkah sistematis dalam menggunakan induksi matematika, artikel ini bertujuan untuk menunjukkan bagaimana teknik induksi dapat menyederhanakan dan memperjelas solusi untuk masalah kombinatorika yang lebih kompleks berikutnya. Artikel ini bertujuan untuk mengidentifikasi penerapan induksi matematika dalam menyelesaikan.

Kata Kunci: Induksi matematika, kombinatorika dasar, pembuktian matematis

Abstract

Mathematical induction is an important proof method in many areas of mathematics, including combinatorics. In basic combinatorics problem solving, mathematical induction is used to prove the truth of statements that apply to all positive integers, by starting from the base case and continuing with the proof at the next stage. This article aims to identify the application of mathematical induction in solving basic combinatorics problems, such as counting the number of ways of object selection, object arrangement, and object distribution. By focusing on the systematic steps in using mathematical induction, this article aims to show how induction techniques can simplify and clarify solutions to more complex combinatorics problems.

Keywords: *Mathematical induction, basic combinatorics, mathematical proof*



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

PENDAHULUAN

Matematika adalah disiplin ilmu yang mempelajari struktur, pola, dan hubungan menggunakan angka, simbol, dan konsep abstrak. Sebagai salah satu cabang ilmu pengetahuan tertua, matematika memiliki cakupan yang luas, mencakup berbagai aspek kehidupan dan ilmu pengetahuan. Matematika memiliki peran yang penting bagi dunia pendidikan karena matematika adalah ilmu dasar yang digunakan secara luas dalam berbagai bidang kehidupan. Matematika sebagai wahana pendidikan tidak hanya digunakan untuk mencapai tujuan, seperti mencerdaskan anak bangsa tetapi juga untuk mempersiapkan mahasiswa agar dapat menghadapi perubahan keadaan di dalam kehidupan. Matematika dapat melatih mahasiswa untuk bertindak atas dasar pemikiran secara logis, rasional, kritis, cermat, jujur, efisien, dan efektif dalam memecahkan masalah. Di samping itu, mahasiswa diharapkan dapat menggunakan matematika dan pola pikir matematika dalam kehidupan sehari-hari dan dalam mempelajari berbagai ilmu pengetahuan yang penekanannya pada penataan nalar dan pembentukan sikap mahasiswa. Matematika dapat melatih siswa untuk bertindak atas dasar pemikiran secara logis, rasional, kritis, cermat, jujur, efisien, dan efektif dalam memecahkan

masalah. Ciri utama matematika adalah penalaran deduktif, yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan haruslah didasarkan pada kebenaran konsep atau pernyataan sebelumnya, sehingga kaitan antar konsep atau pernyataan matematika bersifat konsisten (Indah & Nuraeni, 2021). Salah satu materi matematika yang membutuhkan penalaran dan kecermatan siswa adalah materi induksi matematika. Induksi matematika merupakan salah satu teknik atau metode pembuktian dasar dalam matematika yang harus dipahami sejak awal karena akan digunakan pada materi matematika selanjutnya (Hasan, 2016). Kemampuan membuktikan sangatlah penting karena hal itu dapat melatih kemampuan penalaran dan logika.

Induksi Matematika adalah metode pembuktian yang berguna untuk membuktikan pernyataan matematika berkaitan dengan bilangan asli (Astawa, dkk, 2020). Proses pembuktian dengan induksi matematika terdiri atas dua langkah utama yaitu langkah dasar (basic step) dan langkah induksi (induction step) (Hine, 2017). Langkah-langkah pembuktian dengan Induksi Matematika dapat melatih kemampuan analisis mahasiswa. Induksi matematika merupakan salah satu metode pembuktian formal yang sangat penting dalam matematika, terutama dalam pembuktian yang melibatkan pernyataan-pernyataan yang berlaku untuk himpunan bilangan bulat positif. Metode ini menawarkan pendekatan sistematis untuk menunjukkan kebenaran suatu proposisi secara umum dengan membuktikan dua langkah penting: langkah dasar (base case) dan langkah induksi (inductive step). Kombinatorika adalah cabang matematika yang mempelajari enumerasi, kombinasi, dan permutasi himpunan dari unsur-unsur dan relasi matematis yang mencirikan sifatsifatnya. Secara sederhana, kombinatorika diartikan sebagai bidang matematika yang mempelajari tentang susunan benda-benda. Materi kombinatorika di beberapa perguruan tinggi termuat dalam mata kuliah matematika diskrit. Materi permutasi dan kombinasi yang diajarkan pada materi kombinatorika menjadi salah satu konsep dasar yang harus dikuasai untuk dapat lebih memahami materi statistika dan di beberapa perguruan tinggi, materi permutasi dan kombinasi menjadi materi pendahuluan pada perkuliahan statistika (Hafidz & Masriyah, 2020). Matematika diskrit khususnya materi kombinatorika menjadi salah satu bahan kajian yang sering menjadi objek penelitian oleh beberapa peneliti. Beberapa studi analisis menyebutkan bahwa peserta didik seringkali mengalami kesulitan dalam mengerjakan masalah kombinatorika terutama kasus permutasi dan kombinasi. Permasalahan itu berupa miskonsepsi dalam membedakan kasus permutasi, kombinasi, dan gabungan permutasi kombinasi, serta kesalahan dalam menggunakan rumus dan sifat.

Dalam bidang kombinatorika, yang berfokus pada penghitungan, pengaturan, dan strukturisasi objek diskrit, induksi matematika sering digunakan untuk menyelesaikan dan membuktikan permasalahan yang melibatkan pola-pola bilangan, rumus rekurens, atau jumlah total objek tertentu. Kombinatorika dasar mencakup berbagai topik seperti permutasi, kombinasi, dan prinsip inklusi-eksklusi, yang semuanya sering memerlukan pembuktian atau penurunan rumus secara umum. Artikel ini bertujuan untuk membahas penerapan induksi matematika dalam menyelesaikan masalah-masalah kombinatorika dasar. Dengan fokus pada pendekatan analitis dan penerapan langkah-langkah induksi, pembahasan ini akan memberikan wawasan mengenai pentingnya metode ini dalam membuktikan keabsahan rumus-rumus kombinatorika dan membantu memahami pola-pola kompleks yang muncul dalam berbagai kasus.

Kajian Pustaka

Kombinatorik memegang kunci utama dalam memecahkan banyak masalah enumerasi dalam matematika diskrit. Kombinatorik merupakan salah satu metode dalam enumerasi (Uripno & Rosyidi, 2019). Budayasa (2008) menyatakan bahwa bagian enumerasi itu sendiri

mencakup aturan perkalian, aturan tambahan, permutasi dan kombinasi. Bagian ini adalah bagian kombinatorik dasar. Menjadi bagian yang paling dasar, kombinatorik dasar perlu dikuasai terlebih dahulu dari awal sebelum masuk ke bagian lain dari matematika diskrit. Zaie & Gooya (2011), menjelaskan berpikir kombinatorik memiliki empat tingkatan, yaitu mengidentifikasi masalah, kemudian meyakinkan diri bahwa telah berpikir kombinatorik adalah alat untuk memecahkan masalah, siswa harus menggunakan pemikiran kombinatorial mereka dan menemukan cara yang sistematis untuk memastikan atas semua kemungkinan. Individu yang melakukan operasional formal pada saat memecahkan suatu masalah akan menggunakan seluruh kombinasi/faktor yang mungkin ada kaitannya dengan masalah tersebut. Kemampuan dalam melakukan kombinasi tersebut akan berdampak pada kemampuannya dalam memecahkan suatu masalah kombinatorial. Menurut (Cahyono & Adilah, 2016) hal ini sesuai hasil inspeksi Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) tahun 2018 menunjukkan Indonesia berada pada urutan ke-73 dari 79 negara lain peserta TIMSS mempunyai estimasi rata-rata sebesar 397. Sejalan dengan itu (Nur Aini et al., 2024) mengungkapkan bahwa di Indonesia masih banyak siswa mengalami kesulitan dalam menyelesaikan permasalahan pada soal. Kemampuan pemecahan masalah dapat dipengaruhi berbagai faktor salah satunya kecerdasan logis matematis.

Matematika diskrit merupakan mata kuliah dasar (fundamental) dalam ilmu komputer atau informatika, dan menjadi mata kuliah wajib pada program studi yang masuk dalam kelompok teknologi informasi. Namun banyak mahasiswa Program Studi Ilmu Komputer atau Teknik Informatika yang mengalami kesulitan dalam memahami konsep matematika salah satunya yakni matematika diskrit. Menurut (Ananda & Wandini, 2022) ketika seseorang memiliki self-efficacy yang tinggi, maka mereka mampu termotivasi untuk berhasil mencapai tujuan belajarnya dan menghadapi kesulitan (tugas). Hal ini bisa diibaratkan bahwa ketika mahasiswa menilai bahwa dirinya mempunyai efikasi diri yang terlalu rendah maka mahasiswa tersebut tidak akan mampu mencapai target dan akan berdampak pada kegagalan. Ini disebabkan oleh fakta bahwa mahasiswa akan cenderung membatasi diri mereka untuk menghadapi pengalaman belajar yang lebih menantang dan baru.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode deskriptif kualitatif, yang bertujuan untuk menganalisis dan menggambarkan penerapan induksi matematika dalam penyelesaian masalah kombinatorika dasar. Metode ini menekankan pada eksplorasi berbasis pembuktian matematis, di mana langkah-langkah penyelesaian disajikan secara sistematis untuk menunjukkan validitas konsep dan rumus yang digunakan.

Tahapan Penelitian

1. Pemilihan Soal Kombinatorika

Tiga soal kombinatorika dirancang untuk mencakup berbagai konsep dasar, yaitu:

- Permutasi: Menghitung jumlah pengaturan elemen dalam suatu himpunan.
- Kombinasi: Menghitung jumlah cara memilih elemen dari himpunan tanpa memperhatikan urutan.
- Rumus Jumlah Kombinatorika: Melibatkan pola bilangan atau hubungan rekurens.

2. Penyelesaian Soal dengan Induksi Matematika

Setiap soal diselesaikan menggunakan langkah-langkah berikut:

- Langkah Dasar (Base Case): Memverifikasi kebenaran pernyataan untuk nilai awal ($n=1$ atau nilai minimum yang relevan).
- Langkah Induktif (Inductive Step): Membuktikan bahwa jika pernyataan benar untuk $n=k$, maka pernyataan juga benar untuk $n=k+1$.

c. Menarik kesimpulan bahwa pernyataan berlaku untuk seluruh bilangan bulat positif n .

3. Analisis Hasil

Penyelesaian tiap soal dianalisis untuk:

- Memastikan bahwa semua langkah pembuktian sudah memenuhi kaidah induksi matematika.
- Mengidentifikasi pola, tantangan, atau kesalahan yang mungkin muncul selama pembuktian.

Metode deskriptif kualitatif ini memungkinkan eksplorasi mendalam terhadap penggunaan induksi matematika dalam kombinatorika, sehingga memberikan pemahaman yang lebih luas tentang fleksibilitas metode ini dalam menyelesaikan berbagai jenis masalah.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Setelah penentuan metode dan langkah kerja, dilakukan pengujian induksi matematika dalam menentukan kebenaran pernyataan pada beberapa soal kombinatorika. Nantinya hasilnya akan dibandingkan guna mencari tahu apakah induksi matematika efektif dalam membuktikan kebenaran sebuah pernyataan. Berikut soal soal yang akan dilakukan pengujian:

- Buktikan bahwa jumlah semua kombinasi memilih elemen dari himpunan berisi n elemen adalah 2^n atau dengan kata lain buktikanlah hubungan berikut:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Jawab :

Pertama kita perlu menyelesaikan soal dengan menggunakan kombinasi (Interpretasi Kombinatorika)

Dalam himpunan dengan n elemen, setiap elemen memiliki dua pilihan: dipilih atau tidak dipilih. Oleh karena itu, jumlah total subset adalah 2^n , karena ada 2^n cara memilih elemen. Jumlah subset ini sama dengan jumlah semua kombinasi dari memilih 0 elemen hingga n elemen, yaitu:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Setelah kita menemukan hasil dengan menggunakan interpretasi pada kombinatorika, selanjutnya kita mencari kebenaran dari jawaban dengan menggunakan hipotesis pada induksi matematika:

- Basis ($n = 0$)

Untuk $n=0$ hanya ada satu subset (himpunan kosong), sehingga

$$\binom{0}{0} = 1, \text{ dan } 2^0 = 1$$

Pernyataan yang benar untuk $n=0$

- Hipotesis untuk $n = k$, pernyataan benar

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k$$

- Buktikan bahwa untuk $n = k + 1$, pernyataan juga benar:

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \dots + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}$$

Setelah itu, gunakan sifat rekursif kombinasi :

$$\binom{k+1}{r} = \binom{k}{r-1} + \binom{k+1}{r} + \binom{k}{r}$$

Sehingga jumlah elemen pada baris $k + 1$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} = \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+1}{k+1}$$

Dari hipotesis induksi :

$$\sum_{r=0}^{k+1} \binom{k}{r} = 2^k$$

Sehingga diperoleh :

$$\sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$$

Sehingga diperoleh hasil bahwa jawaban yang diperoleh benar untuk semua $n \geq 0$.

2. Buktikan bahwa:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, \text{ untuk } n > 0$$

Penyelesaian:

a. Pertama perlu dilakukan pendekatan pada kombinatorika: Ekspresi ini adalah pengembangan binomial dari $(1 - 1)^n$, yang sama dengan nol. Secara matematis, pengembangan binomial dari $(x + y)^n$ adalah:

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

Dengan substitusi $x = 1$ dan $y = -1$, maka :

$$(1 - 1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (1)^{n-r} (-1)^r$$

Karena $(1 - 1)^n = 0$, maka :

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = 0$$

b. Selanjutnya dilakukan pendekatan pada induksi matematika:

1) Basis (untuk $n = 1$)

Ketika $n = 1$, maka ekspresinya adalah

$$\binom{1}{0} - \binom{1}{1} = 1 - 1 = 0$$

Karena hasilnya sama dengan 0, maka pernyataan benar untuk $n = 1$

2) Hipotesis induksi $n = k$

Misalkan pernyataan benar untuk $n = k$, yaitu :

$$\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k}$$

3) Langkah induksi:

Membuktikan pernyataan juga benar untuk $n = k + 1$

$$\binom{k+1}{0} - \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} - \dots + (-1)^k \binom{k+1}{k+1} = 0$$

Selanjutnya digunakan sifat rekursif kombinasi :

$$\binom{k+1}{r} = \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}$$

Selanjutnya substitusi kedalam penjumlahan, dan pecah menjadi dua bagian :

$$\sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \binom{k+1}{r} = \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} + \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \binom{k}{r-1}$$

Dari hipotesis induksi :

$$\sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} = 0$$

Bagian kedua juga menghasilkan nol karena tanda saling bergantian saling mengeliminasi. Oleh karena itu :

$$\sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \binom{k+1}{r} = 0$$

Pernyataan terbukti benar untuk $n = k + 1$, sehingga benar untuk semua $n > 0$.

3. Buktikan bahwa :

$$\sum_{r=0}^n r \cdot \binom{n}{r} = n \cdot 2^{n-1}$$

Penyelesaian :

a. Pertama dilakukan pendekatan dengan kombinatorika , ekspresi $\sum_{r=0}^n r \cdot \binom{n}{r}$ dapat ditafsirkan sebagai berikut :

- Kita memiliki sebuah himpunan yang berisi n elemen.
- Setiap elemen dapat dipilih atau tidak dipilih untuk dimasukkan ke dalam subset.
- Ekspresi $r \cdot \binom{n}{r}$ menyatakan jumlah total elemen yang dipilih dari semua subset dengan tepat r elemen.

Karena setiap elemen dalam himpunan muncul di separuh dari semua subset (yaitu 2^{n-1}), yaitu jumlah total elemen yang muncul adalah $n \cdot 2^{n-1}$. Dengan demikian :

$$\sum_{r=0}^n r \cdot \binom{n}{r} = n \cdot 2^{n-1}$$

b. Lalu setelah itu dilakukan pendekatan dengan menggunakan induksi matematika:

1) Basis (untuk $n = 1$). Pada saat $n = 1$, ada dua subset yang mungkin , yaitu himpunan kosong dan himpunan berisi elemen tunggal.

$$\sum_{r=0}^1 r \cdot \binom{1}{r} = 0 \cdot \binom{1}{0} + 1 \cdot \binom{1}{1} = 0 + 1 = 1$$

Sementara itu, jika $n = 1$, maka rumus $n \cdot 2^{n-1}$ memberikan :

$$n \cdot 2^{n-1} = 1 \cdot n \cdot 2^{1-1} = 1$$

karena kedua hasil pendekatan sama, maka pernyataan benar untuk $n = 1$

2) Hipotesis induksi: Dimisalkan pernyataan benar untuk $n = k$, yaitu :

$$\sum_{r=0}^k r \cdot \binom{k}{r} = k \cdot 2^{k-1}$$

3) Langkah induksi: Membuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$, yaitu :

$$\sum_{r=0}^{k+1} r \cdot \binom{k+1}{r} = (k+1) \cdot 2^k$$

Gunakan sifat rekursif dari kombinasi :

$$\binom{k+1}{r} = \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}$$

Ekspresi $\sum_{r=0}^{k+1} r \cdot \binom{k+1}{r}$ dua dapat dipecah menjadi dua bagian :

$$\sum_{r=0}^{k+1} r \cdot \binom{k+1}{r} = \sum_{r=0}^{k+1} r \cdot \binom{k}{r-1} + \sum_{r=0}^{k+1} r \cdot \binom{k}{r}$$

Perlu diperhatikan bahwa terdapat dua bagian, yaitu :

Pada bagian pertama, ubah index penjumlahan $r-1 = s$, sehingga:

$$\sum_{r=0}^{k+1} r \cdot \binom{k}{r-1} = \sum_{r=0}^{k+1} r \cdot (s+1) \cdot \binom{k}{s}$$

Pada bagian kedua adalah penjumlahan biasa :

$$\sum_{r=0}^{k+1} r \cdot \binom{k}{r} = \sum_{r=0}^{k+1} r \cdot \binom{k}{r}$$

Dengan menggunakan hipotesis induksi dan menyederhanakan hasil, diperoleh :

$$\sum_{r=0}^{k+1} r \cdot \binom{k+1}{r} = (k+1) \cdot 2^k$$

Karena pernyataan telah terbukti untuk $n = k + 1$, maka pernyataan berlaku untuk semua n , dan dapat disimpulkan bahwa pernyataan benar.

KESIMPULAN

Dalam matematika, induksi matematika adalah salah satu teknik yang sangat penting untuk membuktikan pernyataan yang berlaku untuk semua bilangan bulat positif. Metode ini memungkinkan pembuktian yang sistematis dan efektif melalui dua langkah utama: basis (langkah dasar) dan induksi. Sebagai hasil dari penelitian yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa Kekuatan Metode Induksi Matematika: Induksi matematika dapat digunakan untuk menunjukkan berbagai bentuk pernyataan, seperti rumus deret, sifat pembagian, dan karakteristik dari himpunan, graf, dan teori bilangan. Pendekatan dalam Kombinatorika: Induksi matematika menjadi alat penting untuk menunjukkan identitas kombinatorial seperti rumus koefisien binomial, prinsip inklusi-eksklusi, dan hubungan rekursif dalam bidang kombinatorika. Metode ini memungkinkan penyelesaian masalah dengan pola yang kompleks dan memberikan solusi yang lebih sistematis daripada metode konvensional. Aplikasi Luas: Metode ini tidak hanya digunakan dalam matematika murni; itu juga digunakan dalam bidang lain seperti informatika (untuk membuktikan algoritma), fisika (untuk menggunakan deret

Fourier), dan teori graf, selain sangat digunakan dalam kombinatorika. Kelemahan dan Batasan: Meskipun induksi matematika sangat kuat, itu juga kurang efektif untuk membuktikan pernyataan yang tidak mengikuti pola tertentu atau membutuhkan pendekatan non-linear. Selain itu, penelitian ini menekankan betapa pentingnya bagi siswa untuk memahami konsep dasar induksi matematika karena tidak memahami langkah-langkah dasar atau cara membuat hipotesis induksi menyebabkan banyak kesalahan. Pendekatan pembelajaran kombinatorika yang menekankan aplikasi praktis dari pola kombinatorial sangat membantu siswa memahami aplikasinya. Studi lebih lanjut dapat difokuskan pada pembuatan alat bantu pembelajaran interaktif berbasis teknologi yang dapat membantu.

DAFTAR PUSTAKA

- Ardiawan, Y. (2015). Analisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal induksi matematika di IKIP PGRI Pontianak. *Jurnal Pendidikan Informatika Dan Sains*, 4(1).
- Cahyani, L. (2019). Analisis Kesulitan Belajar Matematika Diskrit Pada Mahasiswa Manajemen Informatika Amik Bina Sriwijaya Palembang. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Program Pascasarjana Universitas PGRI Palembang*, 430-442
- Fafida, A., Indah, R. P. (2023) Efikasi Diri Mahasiswa Pada Perkuliahan Matematika Diskrit. *Jurnal Derivat*, 10(3), 169-179
- Hidayah, S., Laeli, S. N., & Hidayati, N. (2022). Analisis Kesalahan Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Soal Induksi Matematika. *Jurnal Review Pendidikan dan Pengajaran (JRPP)*, 5(1).
- Juliarti, I., Susanto, H. A., Astutinansyah, E. L. (2024) Pemecaha Masalah Menurut Teori Polya, Dewey, Krulick, Dan Rudnick Berdasarkan Kecerdasan Logis Matematis, *Jurnal Pendidikan Matematika* 15(2), 114-130
- Kurniawan, R. I., Rosjanuardi, R., & Albania, I. N. (2022). Analisis Kesulitan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Induksi Matematika. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, 11(4), 3777-3789.
- Lazulfa, L. Putra, D. B. P. (2020) Pengembangan Modul Matematika Diskrit Berbasis Arias Pada Mahasiswa Teknik Informatika. *Judika: Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(2), 101-107
- Pratiwi, I. R., Sari, E. M., Novitasari, N., Zikri, A., & Putra, M. G. P. (2023). Pengembangan Aplikasi Smart-Calculator Berbasis Digital Sebagai Media Pembelajaran Materi Kombinatorika [Developing Smart Application-Digital-Based Calculator As A Reinforcement Media In Learning Discrete Mathematics]. *Johme: Journal of Holistic Mathematics Education*, 7(2), 180-196.
- Rapanca, D., Wibowo, T., Sapti, M. (2020) Struktur Berpikir Kombinatorik Siswa Dalam Menyelesaikan Masalah Matematika. *JPSE : Jurnal Pendidikan Surya Edukasi*, 6(1), 96-103
- Triatmi, E., & Setiawan, R. (2018). Analisis strategi bernalar logis dan membagi kasus pada permasalahan non rutin kombinatorika. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika SOLUSI*, 2(3), 231-241.