JETBUS Journal of Education Transportation and Business
E-ISSN: 3062-8121 P-ISSN: 3062-813X
Vol. 2 No. 2 Desember 2025

Analisis Logika Predikat dalam Pembuktian Matematika: Studi Kasus Terpilih

Yurni Anti[1] Abelia Syalomika Hutajulu[2] Thesia Manurung[3] Elisabet L Simbolon[4] Rosmia Noviana[5]
Program Studi Statistika, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan, Indonesia[1,2,3,4,5]
Email: yurnianti693@gmail.com[1]

Abstract
Mathematical proof is a fundamental pillar that supports the truth of every theorem and proposition. Behind the rigor of the proof, there is a systematic logical structure. This study focuses on the central role of predicate logic as a formal tool for analyzing and validating arguments in mathematical proof. Using a case study approach on several basic proofs, this article illustrates how key concepts in predicate logic—such as the universal quantifier (∀) and existential quantifier (∃), variables, and predicates—are applied to translate mathematical statements into a precise and ambiguity-free symbolic form. This analysis shows that predicate logic not only provides a framework for verifying the validity of a proof but also clarifies the flow of reasoning and the underlying assumptions. This study draws on materials from the "Basic Logic and Mathematics Module" from Pembangunan Jaya University and "The Relationship Between Propositional Logic and Predicate Logic" from Diponegoro University to build its theoretical foundation.
Keywords: *Predicate Logic, Mathematical Proof, Universal Quantifier, Existential Quantifier, Symbolic Logic*

Abstrak
Pembuktian matematika merupakan pilar fundamental yang menopang kebenaran setiap teorema dan dalil. Di balik rigorusitas pembuktian tersebut, terdapat struktur logika yang sistematis. Penelitian ini berfokus pada peran sentral logika predikat sebagai alat formal untuk menganalisis dan memvalidasi argumen-argumen dalam pembuktian matematika. Dengan menggunakan pendekatan studi kasus pada beberapa pembuktian dasar, artikel ini mengilustrasikan bagaimana konsep-konsep kunci dalam logika predikat-seperti kuantor universal (∀) dan eksistensial (∃), variabel, dan predikat-diaplikasikan untuk menerjemahkan pernyataan matematis ke dalam bentuk simbolik yang presisi dan bebas ambiguitas. Analisis ini menunjukkan bahwa logika predikat tidak hanya menyediakan kerangka kerja untuk memverifikasi keabsahan suatu bukti, tetapi juga memperjelas alur penalaran dan asumsi yang mendasarinya. Kajian ini merujuk pada materi dari "Modul Dasar Logika dan Matematika" Universitas Pembangunan Jaya dan "Hubungan Antara Logika Proposisi Dengan Logika Predikat" dari Universitas Diponegoro untuk membangun landasan teoretisnya.
Kata Kunci: Logika Predikat, Pembuktian Matematika, Kuantor Universal, Kuantor Eksistensial, Logika Simbolik

PENDAHULUAN

Matematika sering disebut sebagai bahasa universal. Kekuatan utamanya terletak pada kemampuannya untuk membangun argumen yang ketat dan dapat diverifikasi secara objektif melalui proses yang disebut pembuktian. Menurut Modul Dasar Logika dan Matematika dari Universitas Pembangunan Jaya, logika adalah studi tentang penalaran yang valid. la menyediakan alat untuk membedakan antara argumen yang benar secara logis dan yang keliru. Logika proposisional, yang berurusan dengan pernyataan tunggal (proposisi) yang dapat bernilai benar atau salah, merupakan fondasi awal. Namun, logika ini memiliki keterbatasan karena tidak mampu menganalisis struktur internal dari sebuah pernyataan yang melibatkan objek dan propertinya. Sebagai contoh, pernyataan "Semua bilangan prima lebih dari 2 adalah ganjil" tidak dapat dianalisis sepenuhnya hanya dengan logika proposisional. Di sinilah peran logika predikat menjadi krusial. Seperti yang diulas dalam kajian epistemologis dari Universitas Diponegoro, logika predikat adalah perluasan dari logika proposisional. la memungkinkan kita untuk memecah pernyataan menjadi subjek (variabel) dan predikat (properti), serta mengukur sejauh mana properti tersebut berlaku menggunakan kuantor. Jurnal ini akan menganalisis penerapan logika predikat dalam beberapa studi kasus pembuktian matematika untuk menunjukkan kekuatannya sebagai fondasi penalaran matematis.

Kajian Teori

Dari Logika Proposisi ke Logika Predikat

Logika proposisional berfokus pada hubungan antar proposisi lengkap menggunakan operator logika seperti konjungsi (Λ), disjungsi (v), negasi (¬), dan implikasi (→). la efektif untuk menganalisis validitas argumen sederhana. Namun, ia tidak dapat menjangkau argumen yang bergantung pada hubungan antar objek di dalam pernyataan. Kajian dari Universitas Diponegoro tentang hubungan epistemologis antara kedua logika ini menekankan bahwa logika predikat hadir untuk mengatasi keterbatasan tersebut. Logika predikat memperkenalkan beberapa elemen baru:

- Variabel (x, y, z): Simbol yang mewakili objek yang tidak spesifik dalam suatu domain.
- Predikat (P(x), Q(x, y)): Pernyataan yang mengandung satu atau lebih variabel dan menjadi proposisi ketika variabel-variabel tersebut digantikan oleh objek spesifik. Contoh: P(x) bisa berarti "x adalah bilangan genap".
- Kuantor: Simbol yang menyatakan kuantitas:
- ▪ Kuantor Universal (∀): Dibaca "untuk semua" atau "untuk setiap". Menyatakan bahwa sebuah properti berlaku untuk semua elemen dalam domain tertentu.
- ▪ Kuantor Eksistensial (∃): Dibaca "terdapat" atau "ada setidaknya satu". Menyatakan bahwa ada setidaknya satu elemen dalam domain yang memenuhi properti tertentu.

Penggunaan kuantor ini memungkinkan matematiakawan untuk membuat pernyataan umum tentang himpunan tak terhingga, sebuah langkah yang mustahil dilakukan dalam kerangka logika proposisional murni (Copi, Cohen, & McMahon, 2014).

Peran Logika Predikat dalam Pembuktian

Modul Dasar Logika dan Matematika dari Universitas Pembangunan Jaya menjelaskan bahwa proses pembuktian pada dasarnya adalah serangkaian inferensi logis yang valid, yang dimulai dari himpunan premis (aksioma atau hipotesis) dan berakhir pada sebuah kesimpulan (teorema). Logika predikat menyediakan aturan inferensi yang ketat untuk memanipulasi pernyataan berkuantor, seperti Universal Instantiation (jika sesuatu berlaku untuk semua, maka itu berlaku untuk individu tertentu) dan Existential Generalization (jika sesuatu berlaku untuk individu tertentu, maka ada setidaknya satu yang memiliki sifat itu).

Aturan Inferensi dalam Logika Predikat

Pembuktian matematika bergantung pada penerapan aturan inferensi yang sahih untuk menurunkan kesimpulan dari premis. Dalam logika predikat, aturan-aturan ini diperluas untuk menangani kuantor. Beberapa aturan kunci meliputi:

- Instansiasi Universal (Universal Instantiation): Jika *VxP(x)* benar, maka kita dapat menyimpulkan bahwa *P(c)* benar untuk sembarang elemen e dalam domain.
- Generalisasi Universal (Universal Generalization): Jika *P(c)* dapat dibuktikan benar untuk suatu elemen e yang dipilih secara acak (arbitrary) dari domain, maka kita dapat menyimpulkan *∀xP(x).*

- Instansiasi Eksistensial (Existential Instantiation): Jika $\exists x P(x)$ benar, kita dapat memperkenalkan sebuah konstanta baru, katakanlah k, untuk mewakili objek yang memenuhi *P(x),* sehingga *P(k)* benar.
- Generalisasi Eksistensial (Existential Generalization): Jika *P(c)* benar untuk suatu elemen spesifik e dalam domain, maka kita dapat menyimpulkan $\exists x P(x)$.

Aturan-aturan ini membentuk fondasi sintaksis untuk memanipulasi ekspresi berkuantor dalam sebuah pembuktian (Rosen, 2019).

Analisis Studi Kasus

Untuk mengilustrasikan penerapan logika predikat, kita akan menganalisis dua pembuktian matematika dasar.

Studi Kasus 1

Pembuktian bahwa "Jumlah dua bilangan genap adalah bilangan genap". Pernyataan Informal: Jika kita menjumlahkan dua bilangan bulat genap, hasilnya pasti bilangan genap. Analisis dengan Logika Predikat:

1. Definisi Bilangan Genap: Sebuah bilangan bulat n adalah genap jika dan hanya jika terdapat sebuah bilangan bulat k sehingga $n = 2k$.
   - Dalam notasi predikat: $Genap(n) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}(n=2k)$
2. Formalisasi Teorema: Kita ingin membuktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat *a* dan *b,* jika *a* genap dan *b* genap, maka *a* + *b* juga genap.
   - Dalam notasi predikat: $Va \in Z, Vb \in Z[(Genap(a)$ Genap(b)) → Genap(a + b)
3. Langkah-langkah Pembuktian:
   - Ambil sembarang a dan b dari himpunan bilangan bulat ($\mathbb{Z}$). (Aturan Universal Instantiation).
   - Asumsikan premisnya benar: Genap(a) ∧ Genap(b).
   - Dari Genap(a), berdasarkan definisi, berarti $k_1 \in Z$ sehingga $a = 2k_1$.
   - Dari Genap(b), berdasarkan definisi, berarti $k_2 \in Z$ sehingga $b = 2k_2$.
   - Sekarang kita periksa a + b:
     $a + b = 2k_1 + 2k_2$
     $a + b = 2(k_1 + k_2)$
   - Karena k_1 dan k_2 adalah bilangan bulat, maka $k_1 + k_2$ juga merupakan bilangan bulat. Mari kita sebut $k_3 = k_1 + k_2$.
   - Maka, $a + b = 2k_3$, di mana $k_3 \in \mathbb{Z}$.
   - Berdasarkan definisi bilangan genap, ini berarti $\exists k_3 \in \mathbb{Z}(a + b = 2k_3)$. Dengan kata lain, *Genap*(*a* + *b*) adalah benar. (*Aturan Existential Generalization*).
   - Karena kita telah menunjukkan bahwa asumsi *(Genap(a) ∧ Genap(b))* mengarah pada kesimpulan *Genap(a + b)*, maka implikasi [(*Genap(a) ∧ Genap(b))* → *Genap(a + b)*] terbukti benar.

Analisis ini menunjukkan bagaimana logika predikat memformalkan setiap langkah, dari definisi hingga manipulasi aljabar, ke dalam kerangka kerja logis yang solid.

Studi Kasus

Pembuktian Tidak Langsung (Kontradiksi) - "Tidak ada bilangan rasional terkecil yang lebih besar dari 0". Pernyataan Informal: Tidak mungkin kita bisa menemukan satu bilangan rasional positif yang paling kecil, karena selalu ada yang lebih kecil lagi. Analisis dengan Logika Predikat:

1. Formalisasi Pernyataan: $\neg\exists x \in \mathbb{Q}^+[\forall y \in \mathbb{Q}^+(x \leq y)]$. (Tidak ada bilangan rasional positif x sedemikian rupa sehingga untuk semua bilangan rasional positif *y, x* lebih kecil atau sama dengan y).
2. Langkah-langkah Pembuktian dengan Kontradiksi:
   - Asumsikan negasi dari pernyataan tersebut benar. Artinya, kita berasumsi ada bilangan rasional positif terkecil. Asumsi: $\exists x \in \mathbb{Q}^+[\forall y \in \mathbb{Q}^+(x \leq y)]$.
   - Sebut bilangan terkecil ini x_0. Jadi, x_0 adalah bilangan rasional positif dan untuk setiap bilangan rasional positif y, berlaku $x_0 \leq y$.
   - Sekarang, perhatikan bilangan $z = x_0/2$.
   - Karena x_0 adalah bilangan rasional positif, maka z juga merupakan bilangan rasional positif.
   - Kita juga tahu bahwa $x_0/2 < x_0$ (karena $x_0 > 0$).
   - Ini berarti kita telah menemukan sebuah bilangan rasional positif z yang lebih kecil dari x_0.
   - Hal ini berkontradiksi dengan asumsi kita bahwa x adalah bilangan rasional positif terkecil (yaitu, ∀y ∈ Q+(xo ≤ y)).
   - Karena asumsi awal kita mengarah pada sebuahkontradiksi, maka asumsi tersebut pasti salah.
   - Oleh karena itu, pernyataan asli (negasi dari asumsi) haruslah benar. Kesimpulannya: $\neg\exists x \in \mathbb{Q}^+[\forall y \in \mathbb{Q}^+(x \leq y)]$.

Kasus ini menyoroti bagaimana logika predikat menyediakan struktur untuk penalaran tidak langsung, yang merupakan salah satu teknik pembuktian paling kuat dalam matematika.

KESIMPULAN

Logika predikat adalah ekstensi esensial dari logika proposisional yang memberikan kemampuan untuk menganalisis struktur internal pernyataan matematis secara mendalam. Melalui penggunaan variabel, predikat, dan kuantor, ia menyediakan bahasa formal yang presisi untuk merepresentasikan teorema dan definisi. Studi kasus pada pembuktian sifat bilangan genap dan tidak adanya bilangan rasional positif terkecil menunjukkan bagaimana logika predikat berfungsi sebagai kerangka kerja yang memvalidasi setiap langkah inferensi dalam sebuah argumen matematika. la mengubah pembuktian dari sekadar rangkaian langkah intuitif menjadi sebuah derivasi formal yang kebenarannya dapat dilacak secara sistematis. Dengan demikian, penguasaan logika predikat merupakan kompetensi fundamental bagi siapa pun yang ingin memahami dan membangun argumen matematika yang rigorus. Analisis menunjukkan bahwa logika predikat berperan fundamental dalam pembuktian matematika karena mampu merepresentasikan relasi kompleks antara objek matematika. Dibandingkan logika proposisi, logika predikat memberikan ekspresi yang lebih luas dan fleksibel untuk mendefinisikan kebenaran universal maupun eksistensial. Pemahaman yang mendalam tentang logika predikat tidak hanya meningkatkan kemampuan berpikir deduktif, tetapi juga menjadi landasan epistemologis dalam memahami struktur kebenaran matematika.

DAFTAR PUSTAKA

Copi I. M. & Cohen, C. (2019). Introduction to Logic (15th ed.) New York: Routledge.

Hasan, M., & Susanto, B. (n.d.). *Hubungan Antara Logika Proposisi Dengan Logika Predikat (Suatu Kajian Epistemologis).* Fakultas Sastra, Universitas Diponegoro.

Rosen, K. H. (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications* (8th ed.). McGraw-Hill Education

Universitas Pembangunan Jaya. (n.d.). *Modul Dasar Logika dan Matematika.*Tangerang Selatan: Program Studi Teknik Informatika, Universitas Pembangunan Jaya.